

**Basisprüfung Lineare Algebra****Wichtige Hinweise**

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung der Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Lineare Algebra	
Datum	30.01.2017	

1	2	3	4	5	6	Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Auch nicht mit rot oder grün.
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

**Viel Erfolg!**

1. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 0 & -2 & \beta \end{bmatrix}.$$

a) Finden Sie  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so dass die Spaltenvektoren von  $A$  orthogonal sind.

b) Mit den Werten  $\alpha$  und  $\beta$  wie in a):

1. Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von  $A$ .
2. Berechnen Sie  $|\det(A)|$ .

2. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von  $C$ .

b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu  $C$ .

c) Berechnen Sie die Matrix

$$e^C = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} C^n.$$

3. [6 Punkte] Für  $k \in \mathbb{N}$  bezeichne  $\mathcal{P}^k$  den Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad  $< k$ . Betrachten Sie die folgende Abbildung  $\mathcal{F} : \mathcal{P}^3 \rightarrow \mathcal{P}^3$  definiert für alle  $f \in \mathcal{P}^3$  und alle  $x \in \mathbb{R}$  durch

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f), \\ \mathcal{F}(f)(x) = xf'(x) + \frac{1}{x} \int_0^x f(s) ds. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{F}$  eine lineare Abbildung ist.

b) Gegeben seien im Urbildraum und im Bildraum die Basis  $1, x, x^2$ . Durch welche Matrix  $A$  wird  $\mathcal{F}$  beschrieben?

c) Gegeben seien im Urbildraum die Basis  $1 - x, 2x, 4x^2$  und im Bildraum die Basis  $2, \frac{x}{4}, \frac{x^2}{3}$ . Welches ist die neue Matrix  $B$ , die  $\mathcal{F}$  nach dem Basiswechsel beschreibt?

4. [6 Punkte] Gegeben sei das Ausgleichsproblem: finde  $x \in \mathbb{R}^2$ , so dass

$$x = \arg \min_{v \in \mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2, \quad (1)$$

wobei

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Siehe nächstes Blatt!**

a) Lösen Sie (1) mithilfe einer Singulärwertzerlegung.

b) Schreiben Sie die Normalgleichungen für (1) auf und lösen Sie sie.

*Hinweis:* Mit der Notation “argmin” in (1) ist das Element  $x \in \mathbb{R}^2$  gemeint, welches den Ausdruck  $\|Ax - b\|_2$  minimiert.

5. [6 Punkte] Wir betrachten den Vektorraum

$$\mathcal{L}^2[-1, 1] := \left\{ f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{-1}^1 |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

und die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2[-1, 1] \times \mathcal{L}^2[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert für alle  $f, g \in \mathcal{L}^2[-1, 1]$  durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

a) Zeigen Sie, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt über  $\mathbb{R}$  definiert.

b) Wir betrachten die Funktionen  $f_k(t) = \sin(\pi kt)$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass die Vektoren  $\{f_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}^2[-1, 1]$  orthonormal bezüglich dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sind.

*Hinweis:* Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt  $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$ .

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren  $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$  linear unabhängig sind.

d) Was ist die Dimension von  $\mathcal{L}^2[-1, 1]$ ?

6. [6 Punkte] Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen (Bei dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort *nicht* begründen).

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt:  $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ .

b) Gegeben seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$  so dass  $Av = 0$ . Dann kann das Gleichungssystem  $Ax = b$  *nicht* für beliebige rechte Seite  $b$  lösbar sein.

c) Gegeben sei eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $n$  Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ungleich null. Dann gilt  $\det(A) \neq 0$ .

d) Gegeben sei eine orthogonale Matrix  $A$ . Dann gilt  $\det(A) = 1$ .

e) Sei  $\mathcal{P}^k$  wie in Aufgabe 3. definiert. Die Abbildung  $\mathcal{F} : \mathcal{P}^5 \rightarrow \mathcal{P}^9$  gegeben für alle  $f \in \mathcal{P}^5$  und alle  $x \in \mathbb{R}$  durch

$$\begin{cases} f \mapsto \mathcal{F}(f), \\ \mathcal{F}(f)(x) = \frac{d}{dx}(xf(x)^2), \end{cases}$$

ist linear.

f) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und weiter sei  $U, S, V$  eine Singulärwertzerlegung von  $A$ , so dass  $A = USV^T$ . Dann gilt:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$